InvestiGO Revista Científica Multidisciplinaria

Diciembre 2024
ISSN 2953-6367 Vol. 5, No.13, PP.269-280
http://revistainvestigo.com https://doi.org/10.56519/6c4w6d27

IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA DEL ALGORITMO DE DETECCIÓN Y CUBRIMIENTO DE FALLAS VERTICALES LATENTES EN SUPERFICIES DISCONTINUAS

NUMERICAL IMPLEMENTATION OF THE ALGORITHM FOR DETECTION AND COVERAGE OF LATENT VERTICAL FAILURES IN DISCONTINUOUS SURFACES

Marco Vinicio Parra Chávez[1], Ramón Antonio Abancin Ospina[2]

{vinicio.parra@unach.edu.ec[1], ramon.abancin@espoch.edu.ec[2]}

Fecha de recepción: 7/10/2024 / Fecha de aceptación: 30/11/2024 / Fecha de publicación: 2/12/2024

RESUMEN: La detección del conjunto de discontinuidad de funciones discontinuas definidas explícitamente, es un desafío presente en aplicaciones como el procesamiento de imágenes y la localización de fallas geológicas a partir de un conjunto de datos dispersos o regularmente distribuidos de tipo Lagrange. Dentro de este contexto, el propósito del estudio fue la implementación numérica de un algoritmo para detección y cubrimiento fallas verticales latentes en superficies discontinuas de tipo explícito. En este sentido, la investigación fue abordada bajo un enfoque cualitativo, de tipo descriptivo, con diseño de investigación documental; fundamentada en documentos de carácter científicos relacionados con los métodos de detección de superficies explícitas a partir de un conjunto de datos que presentan fuertes variaciones. Además, se realizaron pruebas numéricas al correspondiente algoritmo a partir de un conjunto de datos sintéticos y dispersos de tipo Lagrange, donde la fuente principal de datos ayuda a sintetizar la información. El principal aporte fue Los principales resultados demuestran la efectividad del algoritmo para detectar y representar gráficamente defectos latentes y la transición exitosa entre enfoques teóricos y numéricos. La visualización de nodos clasificados triangulares y curvas poligonales confirma la viabilidad de la cobertura aplicada. Sin embargo, la dependencia de datos sintéticos y Python limita la generalización de los resultados. Se concluye que el algoritmo estudiado construye aproximaciones óptimas para la detección y cubrimiento de fallas verticales latentes en superficies discontinuas.

Palabras clave: Algoritmo, modelo matemático, análisis numérico, aproximación, análisis cualitativo y cuantitativo

[1]Universidad Nacional de Chimborazo, (UNACH) Dirección de Posgrado, Programa de Maestría en Matemática aplicada con mención en Matemática Computacional, https://orcid.org/0009-0000-1252-0108.
[2]Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, (ESPOCH), Facultad de Ciencias, Carrera de Matemática, Grupo de Investigación CIDED, https://orcid.org/0000-0002-2417-6671.

ABSTRACT: The detection of the discontinuity set of explicitly defined discontinuous functions is a challenge present in applications such as image processing and geological fault location from a sparse or regularly distributed Lagrange-type data set. Within this context, the purpose of the study was the numerical implementation of an algorithm for the detection and coverage of latent vertical faults on discontinuous surfaces of explicit type. In this sense, the research was approached under a qualitative, descriptive approach, with a documentary research design; based on scientific documents related to the methods of detection of explicit surfaces from a set of data that present strong variations. In addition, numerical tests were carried out on the corresponding algorithm from a set of synthetic and sparse Lagrange-type data, where the main source of data helps to synthesize the information. The main contribution was The main results demonstrate the effectiveness of the algorithm to detect and graphically represent latent defects and the successful transition between theoretical and numerical approaches. The visualization of triangular classified nodes and polygonal curves confirms the viability of the applied coverage. However, the dependence on synthetic data and Python limits the generalization of the results. It is concluded that the studied algorithm builds optimal approximations for the detection and coverage of latent vertical faults on discontinuous surfaces.

Keywords: **Algorithm, mathematical model, numerical analysis, approximation, qualitative and quantitative analysis**

INTRODUCCIÓN

A lo largo del tiempo el detectar y aproximar discontinuidades en funciones irregulares es un desafío matemático y computacional de gran importancia, con aplicaciones en campos como la geología, el procesamiento de imágenes, el reconocimiento de patrones y la inteligencia artificial. Este problema es particularmente evidente cuando se trata de marcas delgadas o irregulares, donde la identificación precisa de las discontinuidades es fundamental para revelar las características funcionales subyacentes.

Las metodologías para la detección y aproximación del conjunto de discontinuidades en funciones no regulares tienen aplicaciones en problemas específicos, y su implementación práctica puede variar según el contexto de estudio y la distribución de los datos. Por ejemplo, en problemas de procesamiento de imágenes se utilizan datos regularmente distribuidos, correspondientes a los píxeles de la imagen, donde la detección de discontinuidades implica la extracción de contornos y perfiles (1), (2). Esto está presente en el análisis de infografías, reconocimiento de patrones, en aplicaciones satelitales y médicas, entre otras. En contraste, el procesamiento de datos dispersos es común en la localización de fallas (*e.g.*, verticales) en el campo de la geología (1).

En geología, por ejemplo, la detección de fallas verticales ocultas tiene un impacto directo en la exploración de recursos naturales y la evaluación de estructuras subterráneas. Autores como (3) Revisan métodos para el modelado de fracturas geológicas a partir de datos sísmicos, destacando la importancia de métodos apropiados en múltiples escenarios. De manera similar, en el procesamiento de imágenes, se han utilizado métodos de detección de discontinuidades para extraer formas y bordes de imágenes médicas y de satélite, como lo demuestran (4) y (5).

Dentro de este contexto, el principal problema que se presenta es la detección óptima del conjunto de discontinuidad al procesar datos para funciones no regulares, con la finalidad de obtener información sobre su localización exacta o aproximada. Donde, la importancia de este proceso radica en que, una vez identificada, se pueden considerar las previsiones, en cuanto a técnicas o estrategias más convenientes, para una etapa de aproximación de la función regular observada, que evite la aparición del fenómeno de Gibbs.

Con respecto a este problema de investigación sobre detección, recientemente (6) presentaron una metodología teórica que, a partir del conocimiento de un conjunto de datos irregulares y dispersos de tipo Lagrange, permite la detección y aproximación del conjunto de discontinuidades asociadas a fallas verticales latentes en funciones explícitas no regulares. Además, ejecuta la construcción de un cubrimiento sobre el conjunto de discontinuidades obtenido.

Específicamente, estos autores adaptaron aspectos del método de detección de fallas verticales propuesto por (7), cuya implementación genera una curva poligonal que aproxima el conjunto de discontinuidades, inicialmente desconocido. Posteriormente, muestran una técnica de construcción de discos con radios dependientes de la ubicación de sus centros en la curva poligonal aproximante, con el fin de lograr un cubrimiento completo del conjunto de discontinuidades. Donde, este último paso se presentó solo de manera teórica.

Por tanto, el propósito de la presente investigación fue implementar numéricamente la metodología propuesta por (6) para la detección y cubrimiento de fallas verticales latentes en superficies discontinuas explícitas. Concretamente, se realizaron pruebas utilizando un conjunto de datos sintéticos y dispersos de tipo Lagrange, apoyados en la utilización del lenguaje de programación *Python*, con el objetivo de obtener y analizar resultados numéricos. Esto permitió evaluar la capacidad del método para detectar y caracterizar el conjunto de discontinuidades derivadas de fallas latentes en las superficies discontinuas mediante una curva poligonal aproximada, así como, la construcción del cubrimiento basado en dicha curva.

MATERIALES Y MÉTODOS

Enfoque metodológico

La presente investigación está enmarcada en el estudio de la temática de detección y cubrimiento de fallas verticales latentes en superficies discontinuas a partir de un conjunto de datos de tipo Lagrange. Para realizarlo, la pesquisa fue abordada bajo un enfoque cualitativo no iterativo, de tipo descriptivo, con diseño de investigación documental. Esto se debe a que, la mayoría de los estudios cualitativos ayudan a proporcionar interpretaciones descriptivas sobre algún fenómeno de interés; y en el caso específico de las modalidades no interactivas se apoyan en el análisis de documentos autentificados como fuente principal de datos para identificar, estudiar y sintetizar la información para proporcionar conocimientos sobre la situación abordada (8).

Dentro de este enfoque, el tipo descriptivo a través de la observación indirecta a partir de documentos científicos tales como libros y artículos como sustento de la investigación, permitió indagar, describir y entender en profundidad las características del escenario planteado de forma cualitativa.

En este sentido, se modula el diseño de investigación documental, el cual se fundamenta en el estudio de documentos como: libros, anuarios, diarios, monografías, textos, videografías, etc.; donde la observación está presente en el análisis de datos, su identificación, selección y articulación con el objeto de estudio (9). Por tanto, se revisó, recopiló y organizó la información para sustentar la investigación, así mismo, para familiarizarse con los conocimientos existentes dentro del campo al que pertenece el objeto de estudio (10).

La base de datos utilizada para la recolección de datos fue, SCOPUS, LATINDEX, OJS, Google Académico, Redacly, Scielo. Para la selección de documentos se consideraron palabras claves como algoritmo, modelos matemáticos, análisis, etc.

Ruta metodológica

Específicamente, se persiguió revisar, analizar, organizar y describir dentro de un marco teórico-práctico apropiado, a partir de un conjunto de datos sintéticos y dispersos que presentan fuertes variaciones, la implementación numérica del algoritmo de detección y cubrimiento de fallas verticales latentes en superficies discontinuas, propuesto por (9). En este sentido, la investigación siguió la siguiente ruta metodológica:

E_1) Etapa de revisión documental: consistió en la indagación, identificación, recolección y selección de documentos (libros y artículos publicados en revistas científicas) disponibles en la Internet en repositorios como *Google* Académico. Específicamente, relacionados con contenidos actuales, oportunos, pertinentes, notables y lo más ajustadas al propósito del tema. Esto, con la finalidad de dar respuestas actualizadas a lo tratado en el presente artículo y que sirvan de referencia para realizar otros estudios acordes con la temática planteada. Particularmente, con detección y cubrimiento de fallas verticales latentes en superficies discontinuas de tipo explicito, es decir, $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $z = f(x, y)$. Proceso que comienza a partir del conocimiento de un conjunto de datos dispersos y que presentan fuertes variaciones, definidos por $\mathfrak{D} = \{(\xi_j, f(\xi_j))_{j=1}^{N} : \text{para } \xi_j \in \Omega\}$ de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.

E_2) Etapa de análisis y organización de documentos: derivaron en la afirmación de dos categorías principales: Detección y aproximación del conjunto de discontinuidad D de la función observada; y el cubrimiento del conjunto del conjunto de discontinuidad. Donde se realizó una contextualización, basado en la metodología teórica de (9) en la detección y aproximación de fallas verticales latentes en superficies discontinuas, a través de curvas poligonales Γ_p; y en el cubrimiento de estas curvas poligonales aproximantes, respectivamente.

E_3) Etapa de implementación numérica del algoritmo de detección y cubrimiento de fallas verticales latentes en superficies discontinuas propuesto por (9): la cual radicó en realizar pruebas numéricas a partir de un conjunto de datos sintéticos irregulares y dispersos de tipo Lagrange. Proceso que se articuló con la utilización del lenguaje de programación Python.

E_4) Etapa de reflexión: espacio para la discusión de los resultados obtenidos a partir de la información recabada, definiendo una postura crítica propia de los autores, contrastados con referentes teóricos. Esto con la finalidad de abrir un abanico de posibilidades que incentiven el estudio de la temática planteada, con ahínco en la búsqueda de óptimas detecciones y cubrimiento de fallas verticales latentes en superficies discontinuas.

RESULTADOS

Para la implementación numérica del algoritmo de detección y cubrimiento de fallas verticales, se utilizó *Google Colab*, una plataforma gratuita que permite escribir y ejecutar código en *Python* directamente en el navegador. En particular, el uso de bibliotecas de código abierto, como *NumPy*, *SciPy* y *Plotly*, facilitó el cálculo numérico, manipulación, graficación y visualización eficiente del conjunto de datos.

Para comenzar, como datos de entrada, se utilizaron un conjunto de datos sintéticos dispersos e irregulares de tipo Lagrange, denotado por:

$$\mathfrak{D} = \{(\xi_j, f(\xi_j)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}: j = 1,2,\cdots,133\}$$

con nodos $\xi_j = (x_j, y_j) \in X^{133} \subset \mathbb{R}^2$, compuesto por 133 muestras cuyas alturas varían entre 0 y 102 unidades en el eje $\boldsymbol{z}$. Este conjunto de muestras se presenta de forma gráfica en la Figura 1.

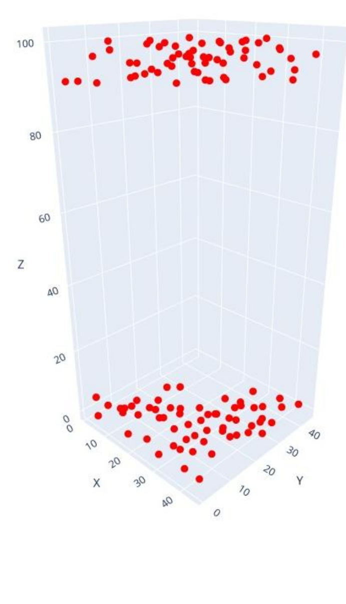

Figura 1. Conjunto $\mathfrak{D}$ de datos sintéticos dispersos e irregulares de tipo Lagrange en $\mathbb{R}^3$

Iniciando la implementación numérica del algoritmo para la detección y cubrimiento de fallas verticales, los datos $\mathfrak{D}$ ingresan en la primera etapa E_1, donde se lleva a cabo la detección y representación de la falla vertical latente en la superficie $z = f(x, y)$, construyendo una curva poligonal aproximante. Para ello, el primer paso $\mathrm{P}_{1,1}$ (localización de nodos cerca de la falla) se subdivide en tres subpasos a partir del conjunto de nodos, tal y como se muestra en la Figura 2.

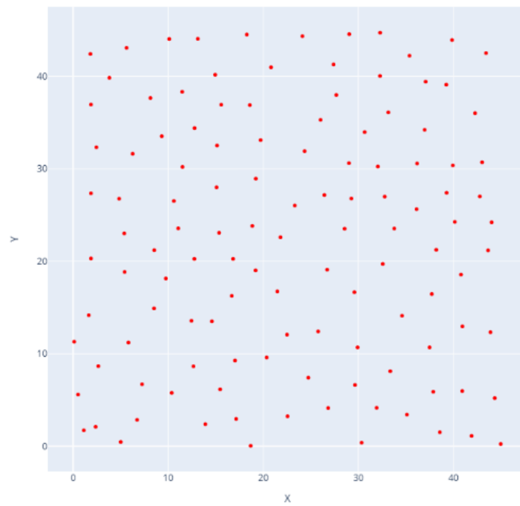

Figura 2. Conjunto X^{133} de nodos dispersos correspondientes a $\mathfrak{D}$

Inicialmente, se realiza un mallado triangular ($\mathrm{P}_{1,1,1}$) basado en el conjunto de nodos X^{133} mediante una *triangulación de Delaunay*, tal como se muestra en la Figura 3.

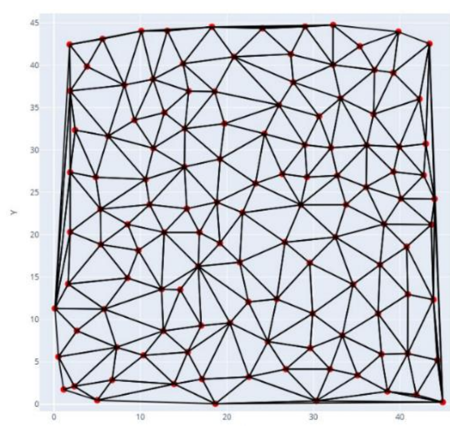

Figura 3. Triangulación $\mathcal{T}(X^{133})$ basada en el conjunto de nodos X^{133}

A continuación, se realiza el subpaso $\mathrm{P}_{1,1,2}$, en el cual se identifican los nodos interiores de la triangulación $\mathcal{T}(X^{133})$ que están cercanos a la curva de falla desconocida, con el objetivo de recolectarlos en el conjunto $\mathcal{R}$. Posteriormente, se ejecuta el subpaso $\mathrm{P}_{1,1,3}$, que clasifica los nodos de $\mathcal{R}$ en valores altos y bajos, representados en la Figura 4 con los colores rojo y azul, respectivamente.

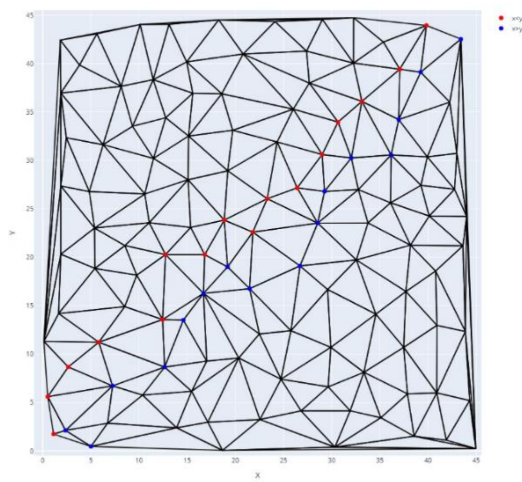

Figura 4. Localización y clasificación de nodos cerca de una curva de falla desconocida

De esta manera, a partir del conjunto $\mathcal{R}$, se procede al segundo paso $\mathrm{P}_{1,2}$, relacionado con el cálculo de la curva poligonal aproximante. En particular, al disponer de los nodos cercanos a una curva de falla vertical, $\mathcal{R}$, es posible identificar los triángulos involucrados, conocidos como triángulos separables, representados en la Figura 5 en color verde.

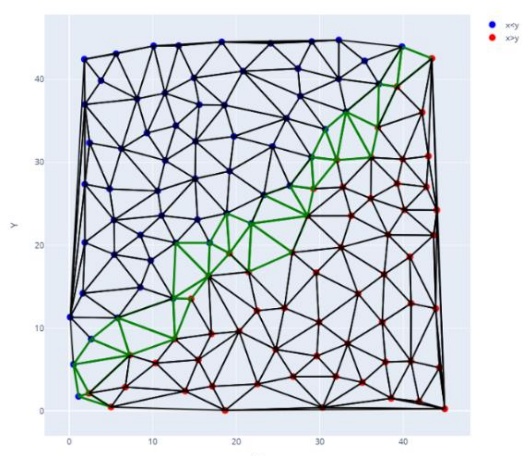

Figura 5. Selección de triángulos separables en $\mathcal{T}(X^{133})$

Estos triángulos permiten calcular e identificar los puntos medios entre los valores altos y bajos en cada uno de ellos, como se muestra en la Figura 6.

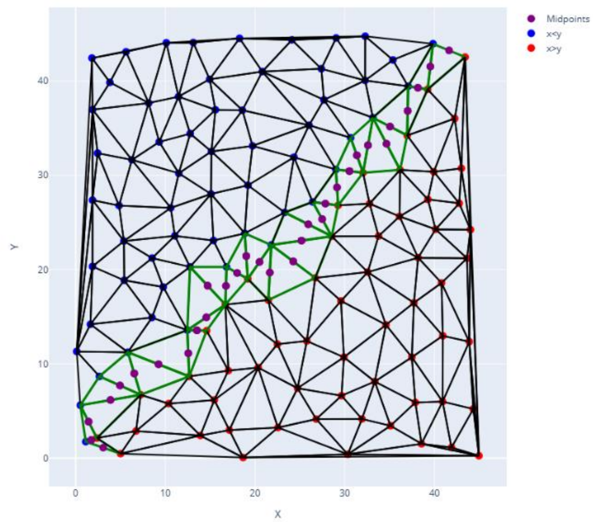

Figura 6. Determinación de los puntos medios de los triángulos divisibles

Finalmente, esta etapa concluye con la obtención de la curva poligonal aproximante Γ_p de Γ, mediante la unión consecutiva de los puntos medios de los triángulos separables, como se muestra en la Figura 7.

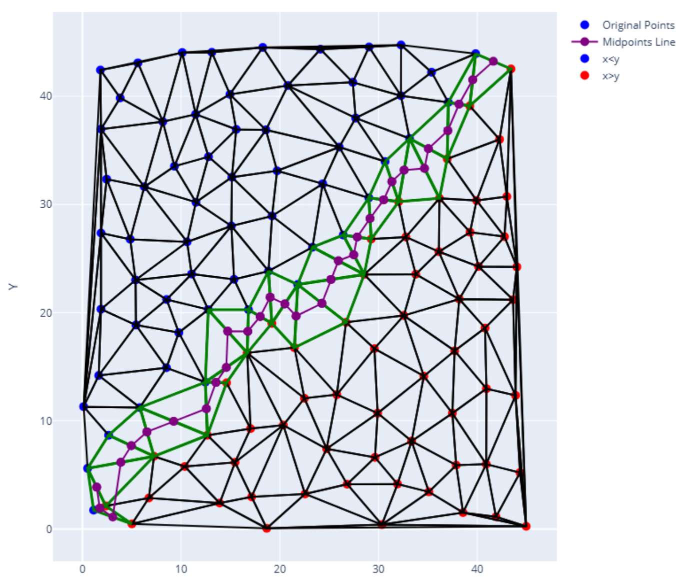

Figura 7. Curva poligonal aproximante Γ_p de la falla vertical Γ latente en la superficie discontinua

El método continúa con la segunda etapa que inicia con la curva poligonal aproximante Γ_p obtenido en la figura 7. Primero, se construyen en $\mathrm{P}_{2,1}$ el conjunto de centros de los elementos del cubrimiento. Estos puntos están formados por los vértices de la curva poligonal aproximante (puntos medios de los triángulos separables) y, un conjunto de puntos introducidos convenientemente por el usuario sobre esta poligonal. Este conjunto se muestra en la Figura 8.

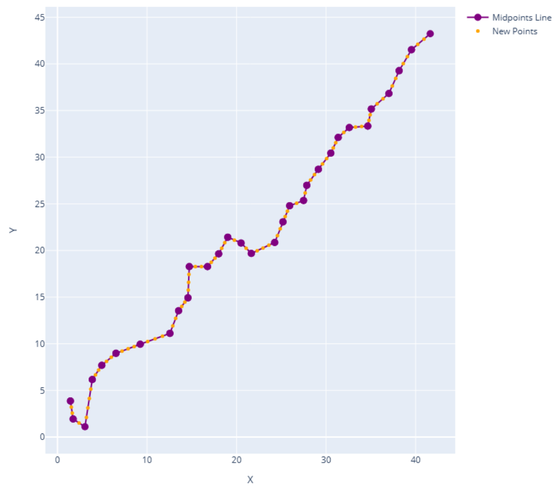

Figura 8. Introducción y distribución de los puntos nuevos en $\boldsymbol{\Gamma_p}$

Así, apoyados en este conjunto de centros anterior, se procede a $\mathrm{P}_{2,2}$ que se basa en la construcción de los radios de los elementos del cubrimiento. Específicamente, dependiendo de la ubicación de puntos candidatos a centros, el algoritmo le asigna un radio conveniente que garantice el cubrimiento de la curva poligonal aproximante. El resultado de este proceso se muestra en la Figura 9.

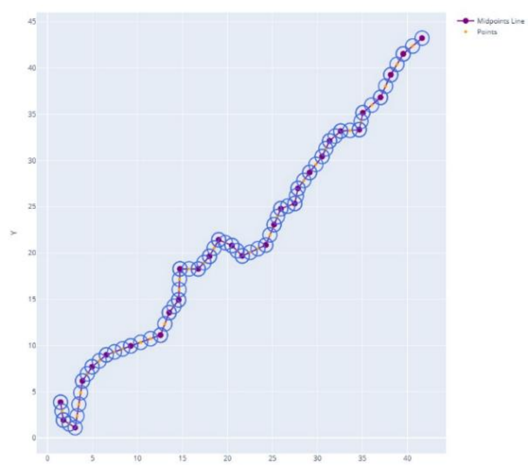

Figura 9. Cubrimiento de la curva poligonal aproximante $\boldsymbol{\Gamma_p}$

DISCUSIÓN

Los resultados obtenidos muestran que el algoritmo propuesto es una herramienta eficaz para detectar y fusionar huecos en superficies transparentes irregulares. La implementación en Python nos permitió generar curvas poligonales aproximadas y realizar una cobertura adaptativa utilizando datos sintéticos. Este hallazgo es consistente con estudios previos sobre análisis numérico y modelado de discontinuidades.

La triangulación de Delaunay, utilizada para identificar nodos que están cerca de un punto de interrupción, es una técnica muy popular en el análisis de datos dispersos. Por ejemplo, (11) enfatizó el poder de la triangulación en aplicaciones computacionales, especialmente en la generación de redes adaptativas para análisis numérico. De manera similar, (12) analizaron el uso de la triangulación para evaluar contornos y superficies, destacando su importancia en el procesamiento de datos geoespaciales y la detección de anomalías estructurales.

Como requisito previo para la generación de curvas poligonales, la clasificación de nodos en pesos altos y bajos sigue las reglas adaptativas descritas por (13). Estos autores desarrollaron métodos simples de reconstrucción de formas puntuales, destacando el uso de algoritmos geométricos basados en gráficos en la detección de formas complejas.

Dada la distribución de curvatura del polígono calculada, la división adaptativa del haz fue eficaz para proporcionar una distribución adecuada. Estudios sobre superficies paramétricas como el de (14) muestran la importancia de ajustar dinámicamente los parámetros de cobertura para representar con precisión las características de los datos. De manera similar, (15) aplicaron conceptos similares a la reconstrucción de superficies utilizando grupos jerárquicos que mejoran la representación de discontinuidades.

En aplicaciones prácticas, el algoritmo tendrá un impacto significativo en términos de procesamiento geográfico y de imágenes. Por ejemplo, en su estudio de distribución geográfica, (16) desarrollaron algoritmos de detección de fallas en datos sísmicos, destacando la importancia de los modelos adaptativos en escenarios con datos escasos e inconsistentes. En términos de procesamiento de imágenes, (17) exploró técnicas para la detección de contornos en imágenes, utilizando transformadas de onda que comparten principios similares con las aproximaciones poligonales empleadas en este estudio.

Aunque los resultados obtenidos son alentadores, el uso limitado de datos sintéticos limita su generalización. Estudios sobre interpolación y ajuste de datos, como los de (18), demuestran la importancia de validar algoritmos con datos reales para asegurar su aplicabilidad en entornos prácticos. De manera similar, Python para la implementación, aunque es adecuado para la creación de prototipos, puede beneficiarse de lenguajes más optimizados para la informática de alto rendimiento, como C++ o Julia, como sugieren (12) Algoritmos de numeración óptimos.

Por otro lado, las integraciones se pueden probar utilizando técnicas modernas de aprendizaje automático como (19), utilizaron redes neuronales para detectar anomalías en datos complejos. Esto abrirá nuevas oportunidades para combinar métodos clásicos con técnicas de inteligencia artificial para mejorar la solidez y versatilidad del algoritmo (20).

CONCLUSIONES

La implementación numérica de la metodología para detectar y cubrir curvas poligonales asociadas a fallas verticales latentes en superficies discontinuas explícitas, a partir de un conjunto de datos dispersos e irregulares de tipo Lagrange, se cristalizo de manera exitosa, siendo el aporte más destacado de este estudio.

En este contexto, las pruebas realizadas con datos sintéticos utilizando el lenguaje de programación *Python* generaron las siguientes conclusiones: en primer lugar, la implementación en *Python* en cada una de las etapas de la metodología fue exitosa, permitiendo una transición fluida y efectiva desde el enfoque teórico hacia el numérico. En segundo lugar, se logró observar la triangulación basada en el conjunto de nodos, la detección de triángulos divisibles y la ubicación gráfica de los nodos a lo largo de la curva poligonal aproximante, junto con la construcción de sus respectivos radios para la cristalización del cubrimiento. Todo esto se llevó a cabo en el marco de un conjunto de actividades numéricas diseñadas para un análisis matemático y crítico, lo que permitió adoptar una postura sólida respecto a la efectividad de la metodología en su implementación numérica.

Entre las limitaciones de este estudio en relación con la implementación numérica para la detección y cubrimiento de fallas verticales latentes en superficies discontinuas, se destacan el uso exclusivo de datos sintéticos y la implementación limitada al lenguaje de programación *Python*, lo que podría restringir la exploración exhaustiva del potencial del algoritmo en diferentes entornos y plataformas, se recomienda realizar pruebas con datos reales para validar la efectividad del algoritmo en situaciones del mundo real. Además, se sugiere implementar el algoritmo en otros lenguajes de programación, tales como *C++*, *Julia* o *FreeFem++*.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Abancín, R.A, Dávalos, M. & Morocho, J. (2023). Detection and coverage of polygonal curves derived from vertical faults on discontinuous surfaces. Libro de Resúmenes. V Jornadas Ecuatorianas de Matemáticas (JEM). Universidad de Investigación en Tecnología Experimental Yachay (Yachay Tech). Urcuquí, 13 al 17 de noviembre de 2023.
2. Bozzini, M. & Rossini, M. (2013). The detection and recovery of discontinuity curves from scattered data. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 240*(3), 148—162. Recuperado de: https://doi.org/10.1016/j.cam.2012.06.014
3. Cabezas, E., Naranjo, D. y Torres, J. (2018). Introducción a la metodología de la investigación científica. Ecuador: Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE.

4. Guerrero, D. y Guerreo, M. (2014). Metodología de la investigación. Serie integral de competencias. México: Grupo Editorial Patria.
5. https://www.editorialpatria.com.mx/pdffiles/9786074384086.pdf
6. [GI1997] Gutzmer, T. and Iske, A. (1997). Detection of discontinuities in scattered data approximation. *Numerical Algorithms, 16*(2), 155--170
7. McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). Investigación educativa: una introducción conceptual. 5a Edición. Madrid, España: Pearson Educación.
8. Parra, M.C. (1999). Sobre detección de discontinuidades y aproximación de funciones no regulares. Tesis de Doctorado. España: Universidad de Zaragoza.
9. Duchon, J. (1977). Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces. *Constructive Theory of Functions of Several Variables*, 85-100.
10. Powell, M. J. D. (1987). Radial basis functions for multivariable interpolation: A review. *Algorithms for Approximation*, 143-167.
11. Bozzini, M., Lenarduzzi, L., & Rossini, M. (2016). Surface reconstruction from scattered data using adaptive methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 291, 172-189.
12. Pan, Y., Li, H., & Wang, C. (2019). Fault detection using computational methods in seismic data analysis. *Journal of Applied Geophysics*, 162, 54-64.
13. Shen, Z., Liu, H., & Wang, J. (2022). Optimized algorithms for discontinuity detection in large-scale data. *Computers & Mathematics with Applications*, 107, 1-19.
14. Bezanson, J., Edelman, A., Karpinski, S., & Shah, V. B. (2017). Julia: A fresh approach to numerical computing. *SIAM Review*, *59*(1), 65-98. https://doi.org/10.1137/141000671
15. Franke, R., & Nielson, G. (1980). Smooth interpolation of large sets of scattered data. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *15*(11), 1691-1704.
16. Gonzalez, R. C., & Woods, R. E. (2018). *Digital image processing* (4th ed.). Pearson.
17. Shewchuk, J. R. (2002). Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation. *Computational Geometry*, *22*(1-3), 21-74.
18. Tarantola, A. (2005). *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation.* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
19. Wendland, H. (2005). *Scattered data approximation.* Cambridge University Press.
20. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., & Zhu, J. Z. (2013). *The finite element method: Its basis and fundamentals* (7th ed.). Butterworth-Heinemann.